

制式系統淺說（中）

科學月刊

第十七卷第四期

謝清俊

定理的檢驗

一個天真無邪的小精靈看到了上期的「愛你」之謎，以為此謎實在簡單不過！立刻擬了一個信心十足的完美步驟，希望能一舉破解成功。這兒就是他的法寶：

- 第一步：將他所有的字串（此時只有一個「愛我」，分別應用四條規則來產生新字串。此時，他擁有的新字串是：「愛我你」、「愛我我」。

- 第二步：將他所有的字串（「愛我」、「愛我你」、「愛我我」），分別應用四條規則來產生新字串。此時，新字串是：「愛我我你」、「愛我你我你」、「愛我我我我」。

- 第三步：將他所有的字串（是些什麼？），分別應用四條規則來產生新字串。此時，新字串。

準此以降，每一個「愛你我」系統能產生的定理，遲早總會出現的吧！他頑皮的說：就這樣一直做下去，等到「愛你」出現了，就證明它是定理。如果它永不出現，那麼，它就不是定理。

這未免太天真些了吧？雖說神仙無歲月，不在乎如失流年，也不能沒完沒了地這樣做下去呀！所以這類型的定理檢驗方法不能算做判定程序。換言之，鑑別字串是否是定理的判定程序必須是有限的步驟、保證可停的方法。

無論如何，尷尬的小精靈沒能破解這個謎。坦白說，此謎不易解。以下，且讓我們先看另一個字串之謎，並增加一些對制式系統的了解以後，再回頭來討論。

「風馬牛」系統

這個謎的名字叫「風馬牛」系統，它只用了三個字—風、馬、牛。為了避免像在「愛你」之謎中無法找到判定程序的尷尬情形，我們一開始就把公理的特性界定清楚：

- 定義：任何合於「X馬風牛X風」形式的字串均為公理。此中X表示任意長度只「風」字的字串。

由此定義，公理的特性非常清楚。換言之，此定義亦表明了公理的判定程序。根據此定義，此系統有無窮多個公理。

此系統只有一條產生規則：

- 規則：令X、Y、Z表示三個只含「風」字的字串，若「X馬Y牛」是一定理，則「X馬Y風牛Z風」亦為一定理。

例如：令X為「風風」，Y為「風風風」，Z為「風」。若「風風牛風風風牛風」為一定理。則「風風馬風風風風牛風」亦為一定理。像這樣的系統，你能找出判定它定理的程序嗎？請先試試再看下文。

柳暗花明

假設你試過了，你一定發現在「風馬牛」系統中的字串裡有許多「風」字，它們被「馬」和「牛」分成三段，而「馬」和「牛」各只出現一次，並且是「馬」在「牛」前。這現象排除了許多其他組合的字串成為定理的可能，也提供了很好的線索來設計判定程序。

如果你仔細觀察，會發現在此系統中所有的字串前二串「風」字數目之和等於第三串「風」字的個數！例如：「風風馬風風牛風風風風」是一定理，因為 $2+2=4$ 。當然，這是可以證明的（此證不難，你不妨試試）。據此，此系統之判定程序已解出來了。

這答案以乎是突然冒出來的。其實，如果你用「 $+$ 」取代馬，「 $=$ 」取代牛，再從頭看看此「風馬牛」系統就會恍然。

比得？

在前期中，曾建議將「愛你我」系統改作「咬人狗」系統來觀察。相信你對這二種不同的表示方式會有不同的感受。在上面的例子裡，若我們做下列的轉換：

馬 $\langle \text{=====} \rangle +$

牛 $\langle \text{=====} \rangle =$

風 $\langle \text{=====} \rangle 1$

風風 $\langle \text{=====} \rangle 2$

風風風 $\langle \text{=====} \rangle 3$

等等

你將發現「風馬牛街系統事實上就是一個兩個整數的加法系統。我們稱這兩個系統為同結構（isomorphism）的關係。同結構體的觀念在科學研究中常用到。像上面的例子，我們就用它來詮釋「風馬牛」系統的物理意義。

在日常生活中，也常用到同結構體的觀念，而將寓意延伸。譬如以兩虎相●必有一傷，來比喻一件爭奪的事件和可能的後果。又如：螳螂捕蟬，黃●在後等等均是。用口語來說，這種用法便是比方，而我們不時也見到些「比不得」的臉紅局面。

談到這兒，我們可以了解，由於同結構的關係而導致系統意義的延伸，而且此現象不僅在制式系統中有，在日常生活上也用，可是此二者之間，還是有差別的。在制式系統中（或是其他的學科裡），同結構形體的認定，必須經過嚴格證明。譬如：「風馬牛」系統與二位整數加法系統之間，其元素必須互相一一對應，而兩個系統的運作規則也必須一一對應，才能證明此二系統是同結構體。證明是同結構體後，才能將各系統所推導出的特性或是意義，延伸到另一系統上去。

可是日常生活中的比方，就沒有這麼嚴謹，而且不易定義什麼是同結構體的條件。通常，比方的條件是由較高層次對事物的「理解」而來，摘其重要的特徵，取其相似之處作為依據，因此就難免有主觀和感性的因素在內。也正如此，常導致對事務認知不同而有「比得」與「比不得」之爭執。我們稱這類型的同結構特性為高層次的，而制式系統中的為低層次，這是以人類智慧層面作參考的分法。由另一角度來看，比方是測試聰明智慧是絕佳方法，我國古代的八股舉試；選拔出的人才都是聰明絕頂的，其根據的重點之就是「比方」的能力。

制式系統的詮釋

在制式系統裡，以其同結構體來詮釋其意義是很重要的特性。許多制式系統的特性經由此詮釋而豁然明朗。對一個意義不太清楚的制式系統，一旦找到一個同結構體來解釋，真有如一聲霹靂，震散滿天陰霾。由另一個角度看，制式系統是一個抽象的結構，它代表著某一類型系統的共同特徵。這就是它可愛、有趣和有威力的地方。當然，像「愛你我」系統這樣的個案，若於找不到我們熟知的同結構體來做進一步的了解，也的確令人苦惱。

制式系統的詮釋是只能被動的。譬如：雖然 $2+2+2=6$ ；可是「風風馬風風馬風風牛風風風風風風」就不是在「風馬牛」系統中的一個定理。這說明了什麼是「被動式」的詮釋，其理不難明白。

一個制式系統也可能有許多不同的詮釋。譬如：若將「風馬牛」系統作下列的對比：

「馬」 $\longleftrightarrow$ 「二」

「牛」 $\longleftrightarrow$ 「右列中扣除」

「風」之轉變與上例相同

也是可以的。可是其詮釋就不同了。

比不得！

談到這兒，引起一個有趣的問題：我們能不能將宇宙中所有實體的現象，都用些制式系統來表示呢？粗看之下，似乎是可以。試想，宇宙間一切實體都是由基本粒子組成，而這些粒子的行為又都膺服物理學上的「制式規則」。因此，粒子每一瞬間的行為都存有固定的因果關係，而唯一的公理就是宇宙誕生時那一瞬間的狀態。照這樣推測下來，這豈不是一個未來命運都定好了的（deterministic）宇宙嗎？該不是這樣的吧？那麼問題出在那兒？

若我們不談以上那麼大且近乎哲學的問題，就以數學來說吧。我們能用制式系統來作為某些數學系統的模式嗎？如果我們不是對這友數學百分之百了解的話，我們能這樣做嗎？如果我們研究制式系統的目的，是為了在此學科中增加些新的了解，那麼，除非我們能證明同結構體是百分之百的全等，否則我們又怎麼能證明每一個定理的詮釋都是正確的？而且，如何證明同結構體是百分之百的全等呢？均將有助於對科學的了解。

由同結構的關係而導出一個系統延伸的意義，是很重要的觀念。一般在學的朋友常常很有本領推導公式，可是一但涉及數學（或某種抽象表達法）的物

理意義即望而怯步，這實在是求學上的障礙。希望本文能提供你一個新的思考方式，在你的思考的清流裡注入一束源頭活水。