

計算機和語文（三）制式系統淺說（下）

科學月刊

十七卷第六期

謝清俊

75 年 6 月

制式系統的一個優點是它可以只用一些簡單且刻板的操作（simple typographical operations，以下稱單調的）組合為較複雜的事物概念。譬如在以前所舉的例子：「愛你我」和「風馬牛」系統裡均是如此，而在後者中更為明顯，它將兩位整數加法的概念很簡潔清晰地表現出來。若我們沿著「風馬牛」系統的思考方式，將之改為表現二位整數乘法的制式系統亦非難事：·公理架構：凡合於「X馬 - 牛X」形式的字串均為定理，其中X為僅含「一」之任意字串。

·推導規則：設X、Y、Z均為只含「一」之字串，若「X馬 - 牛ZX」為一定理，則「X馬Y-牛ZX」為一新定理。

以此系統推導 $2 \times 3 = 6$ 的程序如下例：

（1）「--馬-牛--」.....公理

（2）「--馬--牛----」.....由（1）用推導規則

（3）「--馬---牛-----」.....由（2）用推導規則

用單調的操作來組合為複雜的事物概念亦可視為一種系統化、結構化的表達方式。由另一角度來看，若是有一個機器，它能做這些單調的操作，那它不是有能力可以做很複雜的事了嗎？談到這兒，希望用機器處理複雜事物的曙光乍現，但是也引起了二個關鍵性的問題，那就是：我們真能了解所謂這些單調的操作是些什麼嗎？以這些單調的操作來組合，可以表達（或解）任何複雜的事物嗎？

制式系統的實施

以上這二個問題，一易一難。第一個問題是很容易回答的；把我們已看過的例子稍作整理，就可列出這些單調的操作了，譬如：

- (1) 認讀一群符號（通常是有限的）；
- (2) 寫或記下這些符號；
- (3) 將這些符號由一處移往另一處；
- (4) 消去一些記下的符號；
- (5) 檢查符號是否相同；
- (6) 保管和利用由符號所產生的定理。

這個清單中所列的操作，其功能有少許的重複。我們始且就讓它這樣，吧因為這現象並不重要。重要的是清單中確實只是些簡單的操作，而你更不難發現；這些操作都是目前計算機所具有的基本功能。

利用計算機來解決問題，均需使用一種計算機語言為工具；定義問題、曉以解法，才能事就功成。而目前的任何一種計算機語言都是一個典型的制式系統。它們只能認別有限的符號，且都有制式的語法架構和推理規則。再者，計算機的硬體部分亦是如此，它仍是只能識別有限的符號（0 與 1），且限於電路的特性（制式的），只具備單調的基本操作功能。再深入些觀察，計算機竹理論模式如塗林機，亦然。因此，由制式系統的角度來看，計算機可說是制式系統的一種實施，制式系統無法做的事，計算機也做不到。而時下流行的人工智慧研究，也不過是想把看起來很有智慧的複雜事物，以制式系統的單調操作來設法表達而已。

因此，第二個問題就變成了：計算機能做些什麼？不能做什麼？關於這個問題，簡答之：我們已知的確有些事情是計算機不能做的；但是在給定的條件限制下，這能與不能之間，以目前的知識，還無法清晰的界定。去年塗林獎（註一）的得主卡普（R.M.Karp），就是以他在設法分清這條界線上傑出的學術貢獻而得獎的（註二）。

質數的系統

現在，讓我們再試一個較複雜的例子；能不能用制式系統表達質數的觀念？

一個似乎可行的辦法是由乘法的系統，以「可以分解」的觀念做如下的延伸：

· 推理規則甲：設 X 、 Y 、 Z 均為僅含「一」之字串，若「 $X - 馬 Y - 牛 Z$ 」是一個定理，則「甲 X 」為一定理。其中「甲」是一個新的字（符號），它的作用只是在表示 X 是屬於一個新的定理集合，我們可以叫他甲集合。在此集合中，所有元素的 X 都是可以分解的整數。據此，我們可以找出所有能分解的整數。因此再加上下而的規則，似乎就可以定義出質數了：

· 推理規則乙：設 X 是只含「-」的字串，若「甲 X 」不是一個定理，則「乙 X 」為一定理。其中「乙」亦為一新字，用它來表示質數的集合：「若乙 X 」在此集合中，則 X 必為質數。

以上的做法，乍看之下似乎順理成章，可是它犯了大忌諱——違背了制式系統的基本假設，因為在我們定義的制式系統裡沒有人何一個單調的操作可以檢查「甲 X 」不是一個定理。換句話說，在制式系統裡我們有一個定理的清單，可供檢查，可是我們沒有「非定理」的清單可以使用。就像我們在「愛你」之謎中所問的問題一樣，要確定「愛你」不是一個定理時，你必須跳出此制式系統以外去尋求解答。因此，推理規則乙完全違背了制式系統的精神。在此情形下，我們只能跳在此系統以外，設法去找個可以產生非「甲 X 」的制式系統來解此問題（註三）。

主題與背景

以上的例子引出了一個有趣的聯想，那就是在繪畫裡常有主題與背景之分，就像上述的問題有主題——「定理」與背景——「非定理」的情形很相似。然而主題與背景是否意識著同樣的資訊呢？若主題是結構化的、有系統的，那麼，背景呢？也是結構化的、有系統的嗎？

記得有一則很有味道的謎語：「山在虛無飄渺間——打一字」，謎底是「四」字。看看「四」字中間鏤空的背景部分便恍然了。此外，看看下面的圖案是什麼？

依瑟（M.C. Escher）以善繪這些有哲學意味的圖案而聞名（參閱科月 7 4—2 月號林銘崇的「無風不起浪」）。在下列的兩個圖裡（見圖一及圖二），主題與背景都是很難分的。對制式系統而言，此現象是共同的特性呢？還是特例？

討論與結語

在制式系統裡，假設「非定理」均有共同的「特性」是自然的傾向，問題是這些「特性」能用適當的制式系統表示出來嗎？

圖三是一個假想的構思。在制式系統裡，若我們把公理定的含義均冠以「真」的價值判斷，通常導出的定理亦判為「真」。準此，制式系統並不能涵蓋所有「真」的領域。這觀念表現在圖的左半。在圖右，有一個假想的「反制式系統」存在，它代表上文所談的「背景」。同樣的，它也不可能以「反系統」的方式表現出所有背景的「偽」域來。這個圖對制式系統能力的界定實在是很大的意會。

談到這兒，對制式系統的介紹已近尾聲了。可是還有二個重要的特性沒有介紹，那就是它的一致性（ consistency ）和完整性（ completeness ）。

在一個制式系統裡，若由公理經推理規則之推導，可以導出互為矛盾的定理時，此系統稱為矛盾的（ inconsistent ）。反之，若無以上之情形，則此系統稱為一致的或是和諧的。此條件是制式系統具有物理意義的基礎。

關於完整性的問題，是針對一特定應用的對象而言。也就是說，在誰應用的領域裡，若所有為「真」的陳述（ statements ）均可由此系統產生一是系統的定理，則此系統具完整性。否則，就是非完整的（ incomplete ）。然而，制式系統是否都具完整性呢？哥得（ Go-del ）對此曾發表了非常有名的「不完整性定理」（ incompleteness theorem ），此定理要言之為：沒有一個具一致性的制式系統能完整的表達算術系統（ Arithmetic ）。一個制式系統只要複雜到可以包含整數系統，就沒有足夠的能力導至每一個為「真」的陳述，他並以此檢討牛頓的 mathematica principia 對於爾後數學和哲學的發展有很深遠的影響。

制式系統的發展甚早，可溯至歐氏幾何。也就是說歐氏幾何是早期最具代表性的一個制式系統。制式系統之受重視是十九世紀以後的事情。由歐氏幾何至非歐幾何的發展，可說是哥得以外對制式系統的另一重大批判。本刊所載對數學大師希伯特（ Hilbert ）的介紹諸文中（參閱科月 74-10、74-11、74-12 月號的益智益囊集）有關數論（ number theory ）部分的討論，亦和制式系統的諸問題息息相關。這些討論都超過了作者知識的範圍，亦非在撰寫此文時

設定的範圍以內。謹在此指出這些事實，以便讀者。

在數學或邏輯學裡，常稱本文所謂的「制式系統」為 **axiomatic systems** 或 **axiom systems**。有志一探其嚴謹一面的讀者，可參考：**Sets, Login and Axiomatic Theories**（by R.R.Stoll, 1961），一書中的第三章。

註一：塗林獎是美國計算機學會（A C M）紀念計算機的先驅塗林

（A.Turing）而設的學術獎。其他位相當於計算機科學界中的諾貝爾獎。

註二：卡普的貢獻相當重要，他提供了一套理論和方法來測試問題的複雜度以及在目前的計算機上是否有可行的解法。有興趣的讀者可參閱 **Communication of the ACM** 1986 年 2 號，97 頁至 117 頁間有關之文獻。這些文獻文辭深入淺出是極佳的說明。

註三：有興趣一試的讀者不妨改用「可整除」的觀念，重新訂定一個制式系統以表示所有的質數。這並不很困難，因限於篇幅，在此從略。